



## GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO SUPERIOR: UMA PROPOSTA DE ENSINO HÍBRIDO

ARTIGO COMPLETO

PATRICIA PUJOL GOULART CARPES- patigou23.carpes@gmail.com

JANILSE FERNANDES NUNES- janilse@unifra.br

IURE LAMMEL MARQUES- iure@unifra.br

ELENI BISOGNIN- eleni@unifra.br

### Resumo

O processo de ensino e aprendizagem no ensino superior tem modificado tanto o papel do professor quanto do aluno perante às tecnologias digitais. O presente trabalho visa apresentar e discutir as potencialidades e limitações de uma sequência de ensino elaborada a partir do ensino híbrido em um componente curricular de geometria analítica no ensino superior. Para tal, elaborou-se uma sequência de três aulas via o ensino híbrido com os recursos digitais do ambiente virtual *Moodle* e do *software* GeoGebra, assim como, de roteiros com um caráter investigativo e rotação por estações como metodologias ativas. A primeira aula explorou os pontos e vetores diretores para a determinação das equações da reta e suas classificações via um roteiro e, após, foi proposta uma atividade à distância por meio do *Moodle*, com a ferramenta Fórum. Os alunos deveriam desenvolver uma atividade envolvendo os conceitos abordados em aula, assim como, realizar comentários à atividade do colega. A segunda aula, iniciou com a retomada dos conceitos da última aula a partir das atividades e comentários realizados no *Moodle*. Na sequência, foi proposto um roteiro para problematizar as equações do plano e, ainda, a metodologia rotação por estações para explorar as posições relativas de reta e plano em cada estação. A atividade à distância proposta nesta aula, foi a construção de um material colaborativo versando sobre as posições relativas entre objetos matemáticos via ferramenta *Wiki* do *Moodle*. Na terceira aula, foi apresentado o material colaborativo de cada grupo e, por fim, foi explorado o tema distância entre objetos matemáticos via um roteiro. Os dados foram analisados de forma qualitativa e apontam que os alunos são receptivos a proposta de ensino híbrido para a compreensão de objetos matemáticos, entretanto ainda estão presos às explicações do professor como fonte de conhecimento e organização das informações. A participação dos alunos em aula e à distância foi maciça. Por meio das atividades e metodologias adotadas nesta sequência, percebe-se que os alunos são mais questionadores, tendem a justificar suas respostas com argumentos, além dos cálculos. Neste ambiente o professor é visto como um mediador e necessário para mediar as informações (conceitos) e a aprendizagem dos seus alunos.

**Palavras-chave:** Equações da reta e do plano. Metodologias ativas. Recursos didáticos digitais.

### Introdução

O presente trabalho visa apresentar e discutir as potencialidades e limitações de uma sequência de ensino elaborada a partir do ensino híbrido em um

componente curricular de geometria analítica no ensino superior. O ponto de partida para este estudo vem da constatação dos autores que o magistério superior necessita se aliar às tecnologias digitais na formação dos futuros profissionais egressos das Instituições de Ensino Superior, sejam eles professores ou bacharéis.

É notória a distinção de comportamento dos estudantes do século atual com o anterior, ou melhor, sobre a forma de estudar e aprender dos atuais professores e a forma com que seus alunos estudam e aprendem. A elaboração da sequência de ensino supracitada se propõe a considerar diferentes formas de conceber o conhecimento, assim como, propõe as avaliações de acordo com as atividades desenvolvidas em aula, empregando as tecnologias digitais.

As tecnologias digitais, neste caso o ambiente virtual de aprendizagem *Moodle* e o *software* livre GeoGebra, são ferramentas que o professor dispõe e que tendem a proporcionar ao aluno uma aprendizagem eficiente, que tenha significado ao aluno e não apenas uma memorização. Neste sentido, Bacich, Neto e Trevisani (2015, p. 47) apontam que “a integração com as tecnologias digitais na educação precisa ser feita de modo criativo e crítico, buscando desenvolver a autonomia e a reflexão dos seus envolvidos, para que eles não sejam apenas receptores de informação”.

O tema gerador deste estudo são os objetos matemáticos reta, plano, suas equações e as posições que um assume em relação ao outro. Para tanto, alia-se o ensino híbrido e as tecnologias digitais para promover uma aprendizagem efetiva por meio de uma sequência de ensino do tema disparador. Entretanto, ressalta-se que poucos trabalhos foram encontrados quanto ao tema geometria analítica no Ensino Superior e aplicando o ensino híbrido ou metodologias ativas. Menciona-se esse fato como uma justificativa desse trabalho. Uma aprendizagem efetiva e autônoma são qualidades essenciais ao futuro profissional que ingressa ao mercado de trabalho que está em constante modernização e esse profissional deve ser capaz de se adequar e progredir no seu trabalho.

Ainda a esse fato, ao professor do magistério superior é importante ter a clareza, a compreensão e relatos de experiências bem sucedidas ou não (apontando limitações) que sirvam como um ponto de partida para as suas futuras aplicações ou, então, comparações/aperfeiçoamentos às suas experiências/conhecimentos.

## Referencial teórico

As tecnologias digitais foram empregadas neste estudo por meio de um ensino híbrido. E, para tal, os métodos desenvolvidos nas aulas foram adequados para que as ferramentas (*Moodle* e *GeoGebra*) pudessem realmente potencializar a aprendizagem dos alunos. Deste modo, optou-se em trabalhar com metodologias ativas.

Com o avanço das tecnologias e metodologias o ensino híbrido passou a abarcar mais dimensões no processo de ensino e aprendizagem que passou, então, ser contemplado pelo entendimento: “a expressão ensino híbrido está enraizada em uma ideia de educação híbrida, em que não existe uma única forma de aprender e na qual a aprendizagem é um processo contínuo, que ocorre de diferentes formas, em diferentes espaços” (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015, p. 51 e 52).

Dessa forma, o ensino presencial (na sala de aula) se complementa com o ensino à distância (virtual) por meio das tecnologias digitais. Essas permitem que os alunos e o professor interajam de diferentes formas, intensifiquem a colaboração e a troca de experiências. Proporcionando, assim, tanto ao professor (ensino) quanto ao aluno (aprendizagem) papéis diferenciados em relação ao ensino tradicional.

Segundo Bacich, Neto e Trevisani (2015) há diferentes propostas para o ensino híbrido. Estas propostas são também denominadas de metodologias ativas que norteiam a proposta de ensino do professor. Entende-se por metodologia ativa aquela onde o aluno é ativo na sua aprendizagem e, portanto, o professor deixa de ser o detentor do conhecimento e passa ser o mediador do processo (PEREIRA, 2012).

Nesse ambiente o aluno deixa de ter a posição passiva e cômoda de receber informações e passa a desenvolver competências, tais como: iniciativa, criatividade, capacidade de autoavaliação, cooperação (MITRE ET AL, 2008). Nesse sentido, o ensino a partir de projetos ou resolução de problemas podem ser considerados como metodologias ativas – o aluno perpassa pela análise, síntese e avaliação (BARBOSA; MOURA, 2013).

Dentre as possibilidades de metodologias ativas, cita-se os modelos por rotações que são atividades que envolvem a discussão em grupos orientadas pelo

professor. O modelo de rotação por estações os alunos são organizados em grupos de acordo com o número de estações, com tempo pré-estabelecido em cada estação, as atividades em cada estação não são sequenciais e, após, o tempo acordado os alunos rotacionam até perpassarem por todas as estações. Tendo todos os alunos a oportunidade de terem acesso aos mesmos conteúdos e de acordo com os objetivos propostos pelo professor (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015).

Essa metodologia é menos disruptiva, pois não altera tanto o ambiente de sala de aula. O professor pode atuar como um mediador, levantando os conhecimentos prévios dos alunos, incentivando o trabalho colaborativo e sistematizado. O uso de diferentes recursos é importante, tais como: textos e vídeos. O que pode favorecer a personalização do ensino, visto que nem todos aprendem da mesma forma e ritmo.

O modelo de Rotação por Estações de Trabalho traz diversos benefícios, como: o aumento das oportunidades do professor de trabalhar com o ensino e aprendizado de grupos menores de estudantes; o aumento das oportunidades para que os professores forneçam feedbacks em tempo útil; oportunidade dos estudantes aprenderem tanto de forma individual quanto colaborativa; e, por fim, o acesso a diversos recursos tecnológicos que possam permitir, tanto para professores quanto para os alunos, novas formas de ensinar e aprender (ANDRADE; SOUZA, 2016).

## **Metodologia**

A presente pesquisa tem uma abordagem qualitativa, isto é, ao pesquisador qualitativo os dados numéricos são interpretados de forma crítica, não os toma apenas pelo seu valor facial (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Os dados apontados são próprios dos sujeitos da pesquisa e do contexto sociocultural de que participam e que, via uma análise qualitativa, oportuniza sua compreensão e discussão.

Para tal análise foi proposta uma intervenção didática em uma turma do componente curricular de Geometria Analítica do curso de Matemática – Licenciatura em uma Instituição de Ensino Superior (IES) pública do Estado do Rio Grande do Sul. A proposta constitui-se da sequência de três aulas empregando o ensino híbrido e versando sobre os temas: equações da reta e do plano, posições e

distâncias relativas entre objetos matemáticos (ponto, reta e plano). Os participantes dessa pesquisa foram, em média, 18 alunos matriculados no componente de geometria analítica.

Neste estudo será apresentado os resultados parciais desta sequência de ensino a fim de melhor detalhar as potencialidades e limitações da mesma. Na primeira aula foi apresentada a proposta aos discentes, debatido sobre ensino híbrido, sobre a forma que eles próprios, os alunos, estudam e aprendem os conteúdos abordados em sala de aula e, ainda, foram propostas três atividades avaliativas, uma para cada aula.

As aulas presenciais de cunho investigativo, estavam organizadas a partir de roteiros elaborados pelo professor que visavam o aluno manipular o objeto matemático no *software* GeoGebra, fazer conjecturas para, após, ocorrer uma formalização do tema no quadro com o grupo (professor e alunos). Os roteiros ainda possibilitavam o aluno progredir individualmente, de acordo com o seu entendimento e ritmo.

A primeira aula explorou os pontos e vetores diretores para a determinação das equações da reta e suas classificações: vetoriais, paramétricas, simétricas e reduzidas. O quadro 1 ilustra o roteiro da atividade 1 que problematizou a construção das equações vetoriais de uma reta.

**Quadro 1 - roteiro para determinar as equações vetoriais da reta.**

- 1) Vá no ícone Exibir e clique em caixa de visualização 3D. A caixa de visualização 2D pode ser fechada.
- 2) Defina um vetor diretor  $\vec{v}(a,b,c)$  não-nulo. Escreva na caixa de entrada o comando: vetor((a,b,c))
- 3) Defina um ponto qualquer  $A(x,y,z)$  e plote. Isso pode ser feito com o comando na caixa de entrada  $A(x,y,z)$ .
- 4) Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique. Faça manipulações no GeoGebra. “Só existe uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $A$  e tem a direção do vetor  $\vec{v}$ .”
- 5) Marque um ponto  $P$  que pertença a reta  $r$ . É correto afirmar que o vetor  $\overrightarrow{AP}$  é paralelo ao vetor  $\vec{v}$ ? Justifique.
- 6) Dos itens desenvolvidos acima, podemos dizer que a partir de um ponto  $A$  dado e um vetor diretor  $\vec{v}$  é possível determinar a reta  $r$  que passa pelo ponto dado e tem direção do vetor indicado.
  - i) Assim, um ponto  $P$  só pertence a reta  $r$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AP} = \alpha \vec{v}$ . Isto é,
 
$$\vec{P} - \vec{A} = \alpha \vec{v} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\vec{P} = \vec{A} + \alpha \vec{v}.$$
 Ou, em coordenadas,
 
$$r: (x_1, y_1, z_1) = (x, y, z) + \alpha(a, b, c)$$
 As equações (1) e (2) são denominadas de equação vetorial da reta,  $\vec{v}$  é chamado de vetor diretor e  $\alpha$  de parâmetro. Qual a equação da reta da situação que você criou (considerando o item 2 e 3)?
    - ii) Podemos determinar a equação da reta via um ponto conhecido e o seu vetor diretor. Considere um ponto  $A(1,-1,4) \in s$  que tem direção de  $\vec{v} = (2,3,2)$ , determine um ponto qualquer  $P, P \in s$ ? Realize seus cálculos e confirme no GeoGebra.
    - iii) Se para todo  $\alpha$  é possível determinar um ponto  $P$  que pertence a  $s$ , em quais condições é possível determinar  $\alpha$ ?

iv) A equação da reta determinada em ii) é única? Se não for, determine outra. Dica: pense no que significa o ponto A e vetor  $\vec{v}$  para a equação vetorial da reta. O que significa mudar esses valores?

Fonte: excerto da aula 1 elaborado pelos autores (2018).

Ao término da aula, foi apresentado a atividade avaliativa disponível no Moodle por meio da ferramenta Fórum para ser realizada a distância. A atividade consistia em duas etapas: uma nas determinações de equações vetoriais da reta e pontos que pertencessem a reta via o GeoGebra e analiticamente e a segunda no comentário a atividade do colega. Esse comentário deveria se referir a determinar pontos na reta, determinar retas que pudessem interceptar ou não ou, ainda, outra equação da reta (vetorial, simétrica, paramétrica ou reduzida) da atividade elaborada pelo colega.

A segunda aula iniciou-se retomando algumas atividades e comentários dos colegas a fim de retomar os conceitos abordados na aula anterior e incentivar a participação dos alunos nesse tipo de atividade à distância. Na sequência foi proposto um roteiro para iniciar a problematização das equações do plano. O roteiro instigava a determinação do vetor normal ao plano para, após, a determinação das equações gerais do plano.

Ainda nesta aula, nos dois últimos períodos, foi proposto a metodologia ativa de rotação por estações onde cada estação explorava a posição reta e plano ou entre planos. Em cada estação havia um roteiro (Quadro 2) e a turma foi dividida igualmente em 3 grupos (estações). Conforme a metodologia prevê, os roteiros eram complementares entre si, ou seja, não havia necessidade de passar por um primeiramente. Cabe destacar, que cada estação o grupo tinha a disposição pelo menos um recurso: a estação 1 o recurso era apenas o lápis e papel, a estação 2: lápis, papel e *nootbook* com GeoGebra e a estação 3: lápis, papel e um geoplano tridimensional.

**Quadro 2 - parte dos roteiros das estações**

**Roteiro 2** – as atividades devem ser realizadas no GeoGebra e também de forma analítica (cálculo ou justificativa).

- 1) Uma reta pode pertencer ou não a um plano. Se ela pertencer, como isso pode ocorrer?
- 2) Se a reta não pertencer ao plano, qual pode ser a relação entre o plano e a reta?
- 3) Agora considere a reta  $r$  abaixo e o plano  $\pi: 2x - y + 3z - 4 = 0$ . Plote no GeoGebra a reta  $r$  e o plano  $\pi$ .

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

A atividade criada no GeoGebra deve ser salva no *pen-drive* disponibilizado pelo professor.

- 4) A partir da construção no GeoGebra, qual é a relação entre a reta  $r$  e o plano  $\pi$ ?  
5) Analiticamente, como é possível verificar a sua resposta ao item 4)?

Fonte: excerto da aula 2 elaborado pelos autores (2018).

Ao término dessa aula, foi proposta a atividade avaliativa por meio da ferramenta *Wiki* do *Moodle*. A atividade consistia a partir dos três temas geradores das estações: reta contida no plano, reta interceptando o plano e intersecção de planos a elaboração de um material colaborativo via o *Wiki*. Assim, cada grupo deveria inserir nesta página *online* informações (texto, definição, exemplos, exercícios, vídeos, ou outros) de um dos temas. A atividade também tinha prazo de uma semana para ser postada e na aula seguinte o grupo apresentaria a sua página aos demais colegas.

A última aula iniciou-se com a apresentação do material colaborativo de cada grupo com intervenções dos colegas e do professor quanto às informações adotadas, a escolha do material e resolução de exercícios. Por fim, nesta aula foi abordado o tema distância entre objetos matemáticos por meio de um roteiro e empregando o GeoGebra. Ao final do roteiro, havia duas questões avaliativas para ser entregue.

A seguir são apresentados os resultados dessa sequência de ensino. Os dados foram levantados por meio das atividades avaliativas supracitadas e os registros dos alunos aos roteiros desenvolvidos.

## Resultados e discussões

Nesta seção discutisse os resultados da primeira aula da sequência supracitada. A intervenção didática inicia-se pelo estudo dos objetos matemáticos equações vetoriais da reta considerando o espaço tridimensional. O roteiro disponibilizado aos alunos orienta a discussão/investigação da afirmação “só existe uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $A$  e tem direção do vetor não nulo  $\vec{v}$ .” Através de manipulações no GeoGebra criando pontos, vetores diretores, retas e discussões entre colegas e professor foi possível que os alunos se sentissem confiantes ao justificar esse fato e que serviu de apoio a segunda questão proposta. A seguir três respostas apresentadas pelos alunos: “Verdadeira. A reta  $r$  passa pelo  $A$  e sendo manipulada fica na mesma direção do vetor  $\vec{v}$ .” (*Aluna A*); “Verdadeira, não pode

passar mais de uma reta em um ponto com uma direção, se passar mais de uma a reta vai ser igual a primeira reta”. (*Aluno B*); A afirmação é verdadeira porque posso fazer infinitas retas passando pelo ponto A, mas somente uma delas terá a mesma direção do vetor  $\vec{v}$ .” (*Aluno C*)

Discorrendo sobre as respostas dos alunos supracitadas percebe-se que além da compreensão de direção da reta e de um ponto dado A, as respostas indicam um poder argumentativo, o desenvolvimento da escrita do conhecimento matemático envolvido. A construção no GeoGebra facilitou a visualização geométrica e algébrica dessa afirmação pelo seu dinamismo.

Vale ressaltar que a equação de uma reta dada por  $P = A + \alpha \vec{v}$  não é única. Esse entendimento foi explorado no roteiro por meio dos itens 6 i) a iv). De modo geral, foi possível explorar a partir das construções no GeoGebra que, por exemplo,  $\overrightarrow{AP}$  ou  $\overrightarrow{PA}$ , sendo A e P pertencentes a r, são vetores diretores de r, tendo como equações da reta r  $X = A + \overrightarrow{AP}$  ou  $X = A + \overrightarrow{PA}$ . Ou, ainda, tomando outros pontos da reta, como  $X = B + \overrightarrow{AB}$ .

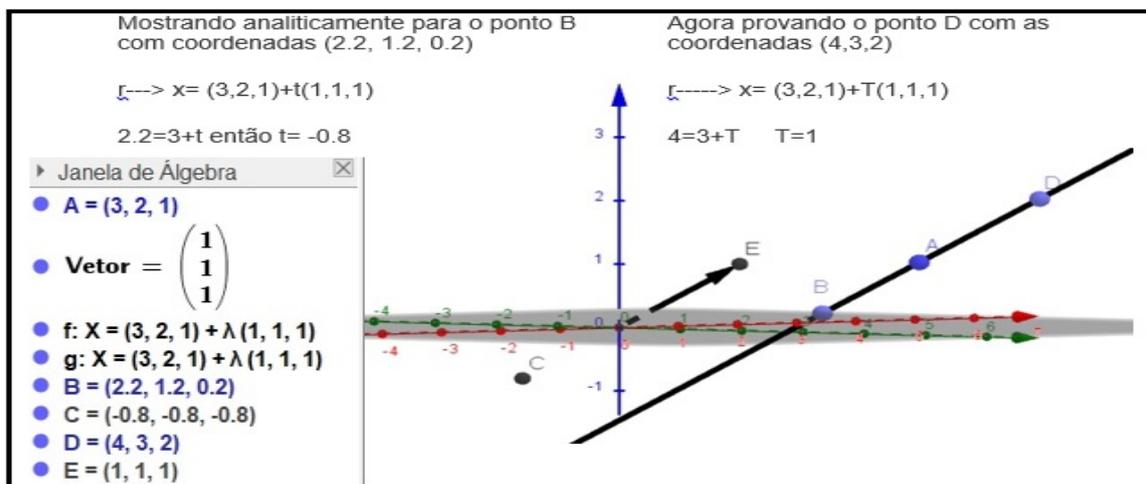
Ao final da primeira aula foi proposto uma atividade avaliativa, via um Fórum, ferramenta do Moodle, para que os alunos durante a semana revisitassem os objetos de estudo. Note que, desse modo, o ensino híbrido aplicado é menos disruptivo, pois primeiramente os “conteúdos” foram abordados em sala de aula e as ferramentas digitais foram apresentadas e usadas para a compreensão dos objetos na forma habitual, presencial (professor e aluno).

De modo geral, os alunos são “acostumados” a receberem primeiramente uma apresentação do conteúdo presencialmente e, após, exercitá-lo. Ciente desse tipo de organização, não foi proposto, nesta sequência de aulas, por exemplo, a metodologia ativa denominada aula invertida, pois foge a esse padrão. Assim, para criar o hábito do aluno ativo na sua aprendizagem foram propostos os roteiros para instigar/problematizar o tema, tecnologias digitais para facilitar a investigação e a metodologia ativa dita rotação por estações. Todas as alternativas citadas tiveram o intuito de não ser traumático ao aluno, durante o componente curricular, a forma com que as questões são apresentadas e organizadas por ele.

Nesse contexto, a atividade avaliativa da aula 1 teve êxito. Pouquíssimos equívocos foram identificados pelo professor. O que demonstra que os roteiros explorados em aula foram compreendidos pelos alunos e os mesmos se sentiram seguros para realizarem a atividade avaliativa proposta.

A atividade avaliativa solicita a construção de uma reta no GeoGebra a partir de dois pontos, assim como, a identificação de um ponto C na reta (via GeoGebra e analiticamente). A figura 1 ilustra a solução de uma aluna.

**Figura 1** - solução da primeira atividade avaliativa



Fonte: excerto da solução de uma aluna.

Com o intuito de estimular a participação dos alunos nos comentários das atividades dos colegas e da sua própria atividade, o professor, via Moodle, fez comentários e sugestões de acréscimos.

Do ponto de vista do professor ao iniciar a aula seguinte era perceptível que os alunos estavam mais entrosados com os objetos matemáticos estudados, evidenciando que a atividade avaliativa, dada como tema de casa, cumpriu a expectativa do aluno se tornar mais ativo na sua aprendizagem, pois teve que construir equações da reta, buscar vetores diretores à mesma e pontos que pertenciam ou não à reta, assim como, exercitar o conteúdo.

Entretanto, como apontado pelos alunos, houve dificuldades ou limitações para a realização da atividade: pelo ambiente diferenciado (virtual) e a atividade de se avaliar e avaliar/contribuir com a atividade do outro. Contudo, atividades fundamentais ao futuro professor de matemática. O que, desse modo, se identifica, também, como uma potencialidade desse recurso e/ou método: a capacidade de

desenvolver um conhecimento matemático, assim como, didático, propondo contribuições, avaliando uma solução, fazendo encaminhamentos pertinentes e socializando uma solução.

Vale ressaltar, que todos os roteiros e materiais de aula estavam disponíveis no ambiente virtual *Moodle* do componente curricular. Este ambiente serviu como repositório de materiais e como ferramenta para atividades à distância.

### **Considerações finais**

Compreendendo que no meio científico é importante/necessário (re)conhecer como o emprego de um estudo teórico se dá na prática de um ambiente de sala de aula, o presente estudo, então, visou apresentar e discutir os resultados parciais da aplicação de uma sequência de ensino vivida por meio do ensino híbrido no ensino superior em um componente curricular de geometria analítica.

Aqui concebe-se que o ensino híbrido abre as portas para um processo de ensino e aprendizagem de matemática mais eficaz, com o aluno reconhecendo seu papel fundamental nesse processo, abrindo os olhos dos professores para as potencialidades que as tecnologias digitais disponibilizam se bem empregadas. Percorre-se os primeiros passos para um ensino híbrido que realmente abarque mais que o ensino presencial e a distância e, sim, um ensino que contemple as diferentes dimensões que desenvolvem o conhecimento matemático.

### **Referências**

ANDRADE, M.C.F.; SOUZA, P. R. Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida. **E-Tech**: Florianópolis, v.9, n.1, 2016. Disponível em: <file:///C:/Users/Patricia/Downloads/773-Texto%20do%20artigo-2528-1-10-20160729.pdf> Acesso em 15 jun 2018.

BACICH, L.; NETO, A.T.; TREVISANI, F.M. *Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação*. Org. Porto Alegre: Penso. 2015.

BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. Metodologias ativas de aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. *Boletim Técnico do Senac*, v. 39, n. 2, 2013, p .48-67.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora, 1994



MITRE, S. M. ET AL. Metodologias ativas de ensino-aprendizagem na formação profissional em saúde: debates atuais. *Ciência & Saúde Coletiva*, v. 3, n.2, 2008, p. 2133-2144.

PEREIRA, R. Método Ativo: Técnicas de Problematização da Realidade aplicada à Educação Básica e ao Ensino Superior. *Anais do VI Colóquio Internacional "Educação e Contemporaneidade"*, São Cristóvão, p. 1-15. 2012.